Aula 8

Operador adjunto

Def 1 Sejam E_1, E_2 dois esp. de Banach, $A: D(A) \subset E_1 \to E_2$ com $\overline{D(A)} = E_1$ (densamente definido)
$\Rightarrow$ operador adjunto $A^*: D(A^*) \subset E_2^* \to E_1^*$ está definido por:

$$D(A^*) = \{ y^* \in E_2^* : \exists z^* \in E_1^* \text{ tal que } \forall x \in D(A) : \langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} = \langle x, z^* \rangle_{E_1 \times E_1^*} \} \quad (1)$$

produtos de dualidade

$A^* y^* = z^*$.

Observação 1) $\forall x \in D(A)$ $\forall y^* \in D(A^*)$ temos

$$\langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} = \langle x, A^* y^* \rangle_{E_1 \times E_1^*}$$

2) Mostremos que z^* em (1) é único, isto é A^* é bem definido.
Lembre que $\overline{D(A)} = E_1$ sse $[\langle y, x^* \rangle_{E_1 \times E_1^*} = 0 \ \forall y \in D(A)$ ~~sse~~ implica que $x^* = 0]$
Agora, suponha que $\exists z_1^*, z_2^* \in E_1^*$ tais que

$$\langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} = \langle x, z_1^* \rangle_{E_1 \times E_1^*} = \langle x, z_2^* \rangle_{E_1 \times E_1^*} \Leftrightarrow$$

$$\langle x, z_1^* - z_2^* \rangle_{E_1 \times E_1^*} = 0 \ \forall x \in D(A) \Rightarrow z_1^* = z_2^* \Rightarrow$$

A^* é bem definido.

3) $y^* \in D(A^*) \Leftrightarrow f(x) = \langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} : D(A) \to \mathbb{C}$ for contínuo.

<u>Demonstração</u> • Suponha que $y^* \in D(A^*) \Rightarrow$ $\exists z^* \in E_1^*$ tal que $\forall x \in D(A)$: $\langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} = \langle x, z^* \rangle_{E_1 \times E_1^*}$ $\Rightarrow |f(x)| \leq \|x\|_{E_1} \cdot \|z^*\|_{E_1^*} \Rightarrow \|f\| \leq \|z^*\|_{E_1^*} \Rightarrow$ f é contínuo.

• Suponha que $f(x) = \langle Ax, y^* \rangle : D(A) \to \mathbb{C}$ é contínuo $\Rightarrow$ por ~~um dos corolários do~~ Teorema de Hahn-Banach, $\exists$ extensão de f: $\hat{f}: E_1 \to \mathbb{C}$ tal que $\|\hat{f}\| = \|f\|$, isto é $\hat{f} \in E_1^*$. Finalmente,

$$f(x) = \langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} = \langle x, \underbrace{\hat{f}}_{z^*} \rangle_{E_1 \times E_1^*}.$$

4) Se A for limitado, $D(A^*) = E_2^*$.

De fato, $|f(x)| = |\langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*}| \leq \|A\| \|x\|_{E_1} \cdot \|y^*\|_{E_2^*}$ $\Rightarrow f$ é limitado $\underset{3)}{\Rightarrow} y^* \in D(A^*)$.

<u>Lema 1</u> $A^*: D(A^*) \to E_1^*$ é fechado.

<u>Demonstração</u> Seja $\begin{cases} y_n^* \to y^* \text{ em } E_2^*, \ y_n^* \in D(A^*) \\ \underbrace{A^* y_n^*}_{z_n^*} \to z^* \text{ em } E_1^* \end{cases}$

Suponha que $x \in D(A) \Rightarrow \langle x, z^* \rangle_{E_1 \times E_1^*} = \lim_{n \to \infty} \langle x, z_n^* \rangle_{E_1 \times E_1^*}$ $= \lim_{n \to \infty} \langle Ax, y_n^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} = \langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} \Rightarrow y^* \in D(A^*)$ e $A^* y^* = z^*$.

<u>Lema 2</u> Sejam $A: D(A) \subset E_1 \to E_2$, $\overline{D(A)} = E_1$ e $T \in B(E_1, E_2) \Rightarrow (A+T)^* = A^* + T^*$ com $D((A+T)^*) = D(A^*)$

Demonstração Sejam $x \in D(A)$, $y^* \in E_2^* \Rightarrow$

$\langle (A+T)x, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} = \langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} + \langle Tx, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} =$

$= \langle Ax, y^* \rangle_{E_2 \times E_2^*} + \langle x, T^* y^* \rangle$. Já que $y^* \in D(T^*) = E_2^*$,

concluimos $y^* \in D((A+T)^*)$ sse $y^* \in D(A^*)$.

Neste caso $(T+A)^* y^* = T^* y^* + A^* y^*$ pela unicidade de z^* em (1).

Teorema 1 Seja $A : D(A) \subset E \to E$, $\overline{D(A)} = E \Rightarrow$

1) $\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*)$

2) $\sigma(A) = \sigma(A^*)$ e $R_\lambda(A)^* = R_\lambda(A^*)$ $\forall \lambda \in \rho(A)$.

Demonstração 1) $\lambda \in \sigma_r(A) \Leftrightarrow \overline{R((\lambda - A))} \neq E \Leftrightarrow$

$\exists y^* \in E^* \setminus \{0\}$ tal que $\langle \lambda x - Ax, y^* \rangle = 0$ $\forall x \in D(A)$

$\Leftrightarrow \langle Ax, y^* \rangle = \langle x, \lambda y^* \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} y^* \in D(A^*) \setminus \{0\} \\ A^* y^* = \lambda y^* \end{cases}$

ou seja $\lambda \in \sigma_p(A^*)$.

2) Mostremos que $\rho(A) = \rho(A^*)$.

- Sejam $\lambda \in \rho(A)$, $y^* \in D(A^*)$, $x \in E \Rightarrow$

$\langle x, R_\lambda(A)^* (\lambda - A^*) y^* \rangle = \langle R_\lambda(A) x, (\lambda - A^*) y^* \rangle =$

$= \langle (\lambda - A) R_\lambda(A) x, y^* \rangle = \langle x, y^* \rangle$ (2) $\Rightarrow$

$R_\lambda(A)^* \underset{\text{usei Lema 2}}{\overset{(\lambda - A)^*}{\overset{\shortparallel}{(\lambda - A^*)}}} y^* = y^*$ (3) (Já que (2) vale $\forall x \in E$)

(3) $\Rightarrow (\lambda - A^*)$ é injetora (suponha que não $\Rightarrow$ (3) falha)

Mostremos que $\lambda - A^*$ é sobrejetora.

Sejam $x^* \in E^*$ e $y^* = R_\lambda(A)^* x^*$ => para $x \in D(A)$ temos $<(\lambda - A)x, y^*> = <R_\lambda(A)(\lambda-A)x, x^*> = <x, x^*>$

$\Rightarrow y^* \in D(A^*)$ e $x^* = (\lambda - A)^* y^* = (\lambda - A^*) y^*$.

Portanto, $\lambda - A^*$ é sobrejetor $\underset{(3)}{\Rightarrow}$ $R_\lambda(A)^* = R_\lambda(A^*)$

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A^*)$ (Já que $R_\lambda(A^*)$ é limitado em todo E^* por T. do gráfico fechado)

- **Reciprocamente** Seja $\lambda \in \rho(A^*) \Rightarrow \lambda \notin \sigma_p(A^*) = \sigma_r(A)$. Basta mostrar que $\lambda \notin \sigma_{ap}(A)$ (Já que $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_r(A)$). Seja $x \in D(A) \Rightarrow$ pelo corolário do T. de Hahn-Banach $\exists y^* \in X^*$ tal que $\|y^*\| = 1$ e $<x, y^*> = \|x\|$. Temos:

$\|x\| = <x, y^*> = <x, (\lambda - A^*) R_\lambda(A^*) y^*> = <(\lambda - A)x, R_\lambda(A^*) y^*> \leq$

$\leq \|R_\lambda(A^*)\| \|(\lambda - A)x\| \Rightarrow \|(\lambda - A)x\| \geq \underset{>0}{C} \|x\| \Rightarrow$

$\lambda \notin \sigma_{ap}(A)$ (pela definição do $\sigma_{ap}(A)$).

Finalmente, $\lambda \in \rho(A)$.

Ex 1 $E \in \{c_0, \ell^p, 1 \leq p < \infty\}$, $D(A) = E$,

$A(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots) \Rightarrow$

1) $\sigma(A) = \overline{B_1(0)}$, 2) $\sigma_p(A) = \emptyset$, 3) se $E \neq \ell^1 \Rightarrow \sigma_r(A) = B_1(0)$

4) se $E = \ell^1 \Rightarrow \sigma_r(A) = \overline{B_1(0)}$.

__Demonstração__ Lembre que $c_0^* = \ell^1$, $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, $(\ell^p)^* = \ell^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Como A é limitado,

$$D(A^*) = \begin{cases} \ell^1 \\ \ell^\infty \\ \ell^{p'} \end{cases}$$

Sejam $x \in D(A)$, $y^* \in E^* \Rightarrow$

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle (0, x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_{n+1} =$$

$$= \langle (x_1, x_2, \dots), (y_2, y_3, \dots) \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle \Rightarrow$$

$A^* y^* = (y_2, y_3, \dots)$ e $\sigma(A^*) = \bar{B}_1(0)$ (veja as aulas anteriores)

$\Rightarrow \sigma(A) = \bar{B}_1(0) \Rightarrow 1)$.

T_1

2) Seja $\lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \exists x \in E$ tal que $Ax = \lambda x \Leftrightarrow$

$$(0, x_1, x_2, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$\Rightarrow x = (0, 0, 0 \dots) \Rightarrow$

$\sigma_p(A) = \phi$.

3) Se $E \neq \ell^1 \Rightarrow E^* = D(A^*) \neq \ell^\infty \Rightarrow \sigma_r(A) = \sigma_p(A^*) = B_1(0)$

veja as aulas anteriores

4) Se $E = \ell^1 \Rightarrow E^* = \ell^\infty \Rightarrow \sigma_r(A) = \sigma_p(A^*) = \bar{B}_1(0)$

Ex 2 $E = L^p[0,1]$, $D(A) = \{ f \in E : f$ é absolutamente cont. em $[0,1]$, $f' \in E$, $f(0) = f(1) \}$

$Af = f'$.

É bem conhecido que $\overline{D(A)} = L^p[0,1]$.

Seja $G \in (L^p)^* \Rightarrow \exists!\, g \in L^{p'}[0,1]$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ tal que

$$\langle f, G \rangle_{E \times E^*} = \overbrace{\int_0^1 f(s) \cdot g(s)\, ds}^{=:[f,g]}, \quad f \in L^p[0,1] \Rightarrow$$

A^* age em $L^{p'}[0,1] \cong (L^p)^*$. Mostremos que

$$D(A^*) = \underbrace{\{ g \in L^{p'}[0,1] : g \text{ é absolut.-te cont. em } [0,1],\ g' \in L^{p'}[0,1],\ g(0) = g(1) \}}_{M} \text{ e}$$

$A^* g = -g'$.

Demonstração • Suponha que $g \in M \Rightarrow$
$\forall f \in D(A)$ temos: $[Af, g] = \int_0^1 f'(s)g(s)\,ds =$
$= -\int_0^1 f(s)g'(s)\,ds = [f, -g'] = [f, A^*g]$
Usando desigualdade de Holder, obtemos
$|[Af, g]| \le \|f\|_p \|g'\|_{p'} \Rightarrow g \in D(A^*) \Rightarrow M \subseteq D(A^*)$
e $A^*g = -g'$

• Mostremos que $D(A^*) \subset M$. Suponha que $h \in D(A^*)$
e $A^*h = h^*$ e $f \in D(A) \Rightarrow$
(3) $\int_0^1 f'(s)h(s)\,ds = [Af, h] = [f, A^*h] = \int_0^1 f(s)h^*(s)\,ds =$
$= f(0)(H(1) - H(0)) - \int_0^1 f'(s)H(s)\,ds$, onde $H(s) = \int_0^s h^*(t)\,dt$.
Mostremos que $h + H = const = C$ ($\Rightarrow$ portanto
$h = C - \int_0^s h^*(t)\,dt \in \{g \in L^{p'}[0,1] : g$ é absolutamente cont. em $[0,1]$ e $g' \in L^{p'}[0,1]\}$)

Seja $Q \in {}^{\perp}\mathrm{span}\{1\}$, ou seja $Q \in L^p[0,1]$ e $\int_0^1 Q(s)\,ds = 0$
(Q pertence ao complemento ortogonal do 1)
É fácil ver que $f(s) = \int_0^s Q(t)\,dt \in D(A)$ (de fato $f(0) = f(1) = 0$ $\underset{(3)}{\Rightarrow}$ $\int_0^1 Q(s)h(s)\,ds = -\int_0^1 Q(s)H(s)\,ds \Rightarrow$
$\int_0^1 Q(s)(h(s) + H(s))\,ds = 0 \Rightarrow h + H \in ({}^{\perp}\mathrm{span}\{1\})^{\perp} = \mathrm{span}\{1\}$
veja p. 292 no livro indicado na página)
$(({}^{\perp}\mathrm{span}\{1\})^{\perp} = \{y \in L^{p'}[0,1] : \int_0^1 y \cdot g\,ds = 0, \forall g \in {}^{\perp}\mathrm{span}\{1\}\})$

$h + H = c$ q.t.p. $\Rightarrow h = -H + c = c - \int_0^s h^*(t)\,dt$ e

$h' = -h^* \in L^{p'}[0,1]$. Da (3) $\Rightarrow \forall f \in D(A)$:

$\int_0^1 f'(s)h(s)\,ds = f(0)(H(1)-H(0)) - \int_0^1 f'(s)H(s)\,ds \Rightarrow$

$\underbrace{\int_0^1 f'(s)\cdot c\,ds}_{(f(1)-f(0))c=0} = f(0)(H(1)-H(0)) \Rightarrow$ se $f(0) \neq 0 \Rightarrow$

$H(1) = H(0) \Rightarrow h(1) = h(0)$

$\Rightarrow$ ~~$h \in D(A)$~~. $h \in M \Rightarrow$

$D(A^*) \subseteq M$.

Teorema 2 (Shauder) Sejam E_1, E_2 esp. de Banach

$\Rightarrow A \in B_0(E_1, E_2)$ sse $A^* \in B_0(E_2^*, E_1^*)$.

Demonstração ($\Rightarrow$) Suponha que A é comp. e $\{y_n^*\} \in E_2^*$ é limitado ($\|y_n^*\| \le C\ \forall n$). O conjunto $\underbrace{\overline{AB_1(0)}}_{K}$ é espaço métrico compacto com $\|\cdot\|_{E_2}$.

Seja $f_n = y_n^*|_K \in C(K)$. Denotando $C_1 = \max_{y\in K} \|y\|_{E_2} < \infty$, obtemos, $\|f_n\|_{C(K)} = \max_{y\in K} |\langle y, y_n^*\rangle_{E_2\times E_2^*}| \le C\cdot C_1\ \forall n \Rightarrow$

$\{f_n\}$ é equilimitada.

Além disso, $|f_n(y) - f_n(z)| = |\langle y-z, y_n^*\rangle_{E_2\times E_2^*}| \le$

$\le \|y_n^*\|_{E_2^*} \|y-z\|_{E_2} \le C\cdot\|y-z\|_{E_2}\ \forall n, y, z \in K$

$\Rightarrow \{f_n\}$ é equicontínua $\Rightarrow$ pelo T. de Arzelà-Ascoli;

$\exists \{f_{n_k}\}$ convergente em $C(K)$:

$\|A^*y_{n_k} - A^*y_{n_e}\|_{E_1^*} = \sup_{\|x\|_{E_1}\le 1} |\langle x, A^*(y_{n_k}^* - y_{n_e}^*)\rangle_{E_1\times E_1^*}| =$

$= \sup_{\|x\|_{E_1}\le 1} |\langle Ax, y_{n_k}^* - y_{n_e}^*\rangle_{E_2\times E_2^*}| \le \|f_{n_e} - f_{n_k}\|_{C(K)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{A^* y_{n_k}\}$ é de Cauchy $\Rightarrow$ converge

Já que E_1^* é ~~Esp.~~ Esp. de Banach $\Rightarrow$ A^* é compacto.

$\Leftarrow$ veja apostila do R. Schnaubelt.

Teorema 3 Sejam E um esp. de Banach, $A : D(A) \subset E \to E$ fechado, $\overline{D(A)} = E$. $\Rightarrow$ $R_\lambda(A)$ é comp. sse $R_\lambda(A^*)$ é comp.

Demonstração Pelo T_1, $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \lambda \in \rho(A^*)$ e $R_\lambda(A)^* = R_\lambda(A^*)$. Pelo T_2, $R_\lambda(A)^*$ e $R_\lambda(A)$ são compactos simultaneamente.